Некоторые материалы из лекций по анализу

РЯД КАК ИНСТРУМЕНТ

Вводная лекция

Рассмотрены примеры задач, демонстрирующие инструмент рядов в работе. Поставлены основные теоретические вопросы, относящиеся к действиям с рядами.

I. Задачи, эвристические действия, теоретические вопросы.

В геологии сначала найдут, разведают месторождение, а потом разрабатывают. В математике так же. Аксиоматика и полезный формализм возникают как результат решения конкретных вопросов и задач. Они не падают с неба, как это может показаться неопытному студенту, когда всё начинается с аксиом.

Этот семестр в значительной степени посвящен рядам, т.е. по существу пределу последовательности. Он идейно прост и довольно техничен. Чтобы замечательно эффективный аппарат теории рядов не свелся к абстрактному исследованию сходимости ряда (существованию некоего предела), дадим хотя бы начальное представление о том, где и как работает этот инструмент.

0. Разминка.

а) *Букашка на резинке*

(задача, предложенная Л.Б.Окунем А.Д.Сахарову). [1]

• Вы держите один конец резинового шнура длиной 1 км. От второго его конца, который закреплен, к вам со скоростью 1 см/с ползет букашка. Каждый раз, как только она проползает 1 см, вы растягиваете резинку на 1 км. Доползет ли букашка до вашей руки? Если да, то приблизительно сколько ей на это потребуется времени?

---

[1] Мартин Гарднер в своей книге «Путешествие во времени»(Москва, Мир, 1990, с.133) пишет: "Эту замечательную задачу в духе парадокса Зеннона об Ахиллесе и черепахе придумал Д.Уилкин из Новой Каледонии. Впервые она была опубликована в декабре 1972 г. в разделе занимательных задач французского ежемесячника Science et Vie, который с присущим ему блеском ведет Пьер Берлокен."

b) *Интеграл и оценка сумм.*

После некоторого размышления для ответа на предыдущий вопрос вам может оказаться полезной сумма $S_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + ... + \frac{1}{n}$.

• Вспомните интеграл и покажите, что $S_n - 1 < \int_1^n \frac{1}{x} dx < S_{n-1}$.

c) *От обезьяны до доктора наук всего* 10^6 *лет.*

Литлвуд в своей известной книжке «Математическая смесь», говоря о больших числах, писал, что 10^6 лет — время, необходимое для превращения обезьяны в доктора наук [2].

• Поспеет ли букашка на защиту или хотя бы к концу света?

1. Экспонента.

a) *Степенные разложения функций* exp , cos , sin.

Согласно формуле Тейлора с остаточным членом в форме Лагранжа

$$e^x = 1 + \tfrac{1}{1!}x + \tfrac{1}{2!}x^2 + \ldots + \tfrac{1}{n!}x^n + r_n(x),$$
$$\text{где } r_n(x) = \tfrac{1}{(n+1)!}e^{\xi} \cdot x^{n+1} \text{ и } |\xi| < |x|;$$
$$\cos x = 1 - \tfrac{1}{2!}x^2 + \tfrac{1}{4!}x^4 - \ldots + \tfrac{(-1)^n}{(2n)!}x^{2n} + r_{2n}(x),$$
$$\text{где } r_{2n}(x) = \tfrac{1}{(2n+1)!}\cos\left(\xi + \tfrac{\pi}{2}(2n+1)\right) x^{2n+1} \text{ и } |\xi| < |x|;$$
$$\sin x = x - \tfrac{1}{3!}x^3 + \tfrac{1}{5!}x^5 - \ldots + \tfrac{(-1)^{n+1}}{(2n+1)!}x^{2n+1} + r_{2n+1}(x),$$
$$\text{где } r_{2n+1}(x) = \tfrac{1}{(2n+2)!}\sin\left(\xi + \tfrac{\pi}{2}(2n+2)\right) x^{2n+2}, \text{ и } |\xi| < |x|.$$

Поскольку для любого фиксированного значения $x \in \mathbb{R}$ при $n \to \infty$ остаточный член в каждой из приведенных формул очевидно стремится к нулю, то пишут

$$e^x = 1 + \tfrac{1}{1!}x + \tfrac{1}{2!}x^2 + \tfrac{1}{3!}x^3 + \tfrac{1}{4!}x^4 + \tfrac{1}{5!}x^5 + \ldots + \tfrac{1}{n!}x^n + \ldots,$$
$$\cos x = 1 - \tfrac{1}{2!}x^2 + \tfrac{1}{4!}x^4 - \ldots + \tfrac{(-1)^n}{(2n)!}x^{2n} + \ldots,$$
$$\sin x = x - \tfrac{1}{3!}x^3 + \tfrac{1}{5!}x^5 - \ldots + \tfrac{(-1)^{n+1}}{(2n+1)!}x^{2n+1} + \ldots.$$

b) *Выход в комплексную область и формула Эйлера.*

Подставим в правую часть первого из этих равенств вместо x комплексное число ix. Тогда после простых арифметических преобразований мы вслед за Эйлером получим замечательное соотношение

$$e^{ix} = \cos x + i \sin x.$$

Положив здесь $x = \pi$, найдем, что $e^{i\pi} + 1 = 0$. Это знаменитое равенство, соединяющее фундаментальные константы математики: e - анализ, i-алгебра, π-геометрия, 1-арифметика, 0-логика.

[2] Дж. Литлвуд, Математическая смесь. Москва, Физматлит, 1962, с. 111.

Мы определили функцию exp для чисто мнимых значений аргумента и получили формулу Эйлера $e^{ix} = \cos x + i \sin x$, из которой очевидно также следует, что

$$\cos x = \tfrac{1}{2}(e^{ix} + e^{-ix}) \quad \text{и} \quad \sin x = \tfrac{1}{2i}(e^{ix} - e^{-ix}).$$

c) *Экспонента как предел.*

Мы знаем, что $(1 + \frac{x}{n})^n \to e^x$ при $n \to \infty$ и $x \in \mathbb{R}$. Естественно полагать, что $e^z := \lim_{n\to\infty}(1 + \frac{z}{n})^n$, где теперь $z = x + iy$ — произвольное комплексное число. Подсчет этого предела дает $e^z = e^x(\cos y + i \sin y)$.

• Проверьте это и получите формулы для $\cos z$ и $\sin z$.

d) *Умножение рядов и основное свойство экспоненты.*

Выражение $e^x(\cos y + i \sin y)$ для e^{x+iy} естественнее получить прямо из соотношения $e^{x+iy} = e^x e^{iy}$, если, конечно, оно справедливо и для комплексных значений аргумента функции exp.

Проверим это прямым умножением. Пусть u и v — комплексные числа. Полагая $e^u := \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!}u^k$ и $e^v := \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{m!}v^m$, находим

$$e^u \cdot e^v = \left(\sum_{k=0}^{\infty} \tfrac{1}{k!}u^k\right) \cdot \left(\sum_{m=0}^{\infty} \tfrac{1}{m!}v^m\right) = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} \tfrac{1}{k!}\tfrac{1}{m!}u^k v^m =$$
$$= \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k+m=n} \tfrac{1}{k!}\tfrac{1}{m!}u^k v^m = \sum_{n=0}^{\infty} \tfrac{1}{n!}(u+v)^n = e^{u+v}.$$

Мы здесь воспользовались тем, что $\sum_{k+m=n} \frac{n!}{k!\,m!}u^k v^m = (u+v)^n$, поскольку $uv = vu$.

e) *Экспонента от матрицы и роль коммутативности.*

А что если в выражении

$$e^A = 1 + \tfrac{1}{1!}A + \tfrac{1}{2!}A^2 + \ldots + \tfrac{1}{n!}A^n + \ldots,$$

считать A квадратной матрицей, полагая, что и 1 обозначает единичную матрицу I того же размера? Например, если A единичная матрица, то, как легко проверить, e^A окажется диагональной матрицей с элементами e на главной диагонали.

• Вычислите $\exp A$ для следующих матриц A:

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

• Пусть A_1 и A_2 — последние две матрицы второго порядка.

Найдите e^{A_1}, e^{A_2} и убедитесь, что $e^{A_1} \cdot e^{A_2} \neq e^{A_1 + A_2}$. В чем тут дело?

• Покажите, что $e^{tA} = I + tA + o(t)$ при $t \to 0$.

• Проверьте, что $\det(I + tA) = 1 + t \cdot \operatorname{tr} A + o(1)$, где $\operatorname{tr} A$ — след квадратной матрицы A.

• Выведите важное соотношение: $\det e^A = e^{\operatorname{tr} A}$.

f) *Экспонента от оператора и формула Тейлора.*

Пусть $P(x)$ — многочлен, а $A = \frac{d}{dx}$ — оператор дифференцирования. Тогда $(\mathrm{A}P)(x) = \frac{dP}{dx}(x) = P'(x)$.

• Проверьте, что соотношение $\exp(t\frac{d}{dx})P(x) = P(x+t)$ является знакомой вам формулой Тейлора.

• Кстати, сколько членов ряда для e^x надо взять, чтобы получить многочлен, позволяющий вычислять e^x на отрезке $[-3,5]$ с точностью до 10^{-2} ?

2. Бином Ньютона.

a) *Степенное разложение функций* $(1+x)^\alpha$.

Зная для натуралных значений α формулу степени бинома

$(1+x)^\alpha = 1 + \frac{\alpha}{1!}x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2 + \ldots + \frac{\alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-n+1)}{n!}x^n + \ldots$,

Ньютон понял, что она справедлива для любых α, только сумма при

этом может быть бесконечной.

Например, $(1+x)^{-1} = 1 - x + x^2 - x^3 + \ldots$, если $|x| < 1$.

b) *Интегрирование ряда и разложение* $\log(1+x)$.

Проинтегрировав последний ряд по отрезку $[0,x]$, найдем, что

$\log(1+x) = x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 + \ldots \quad$ при $|x| < 1$.

c) *Разложения* $(1+x^2)^{-1}$ *и* $\operatorname{arctg} x$.

Аналогично, написав разложение $(1+x^2)^{-1} = 1 - x^2 + x^4 - x^6 + \ldots$ и проинтегрировав его по отрезку $[0,x]$, получим разложение

$\operatorname{arctg} x = x - \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{5}x^5 - \ldots$,

из которого при $x = 1$, вроде бы, следует, что $\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \ldots$.

Может быть это и так (и действительно это так), но чувствуется, что мы уже выходим на границы дозволенного. Следующий пример только усилит наши опасения.

d) *Разложение* $(1-x)^{-1}$ *и вычислительные странности.*

При $x = 1$ разложение $(1+x)^{-1} = 1 - x + x^2 - x^3 + \ldots$ приводит к равенству $\frac{1}{2} = 1 - 1 + 1 - 1 + \ldots$.

Расставив в нем скобки, можно получить $\frac{1}{2} = (1-1) + (1-1) + \ldots = 0$, а можно получить и $\frac{1}{2} = 1 + (-1+1) + (-1+1) + \ldots = 1$.

После такого приходится ставить под сомнение почти все, что мы так успешно и беззаботно делали, перемножая бесконечные суммы (ряды), переставляя и группируя в них члены, интегрируя их. Во всем этом явно надо разобраться. Этим мы вскоре займемся, а пока упомянем еще одну область использования рядов.

3. Решение дифференциальных уравнений.

a) *Метод неопределенных коэффициентов.*

Рассмотрим простейшее уравнение $\ddot{x} + x = 0$ гармонических колебаний и будем искать его решение в виде ряда $x(t) = \mathrm{a}_0 + \mathrm{a}_1 t + \mathrm{a}_2 t^2 + \ldots$. Подставляя ряд в уравнение, собирая члены с одинаковыми степенями t и приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях t в обеих частях уравнения, получим бесконечную систему соотношений:

$2\mathrm{a}_2 + \mathrm{a}_0 = 0, \quad 2 \cdot 3\mathrm{a}_3 + \mathrm{a}_1 = 0, \quad 3 \cdot 4\mathrm{a}_4 + \mathrm{a}_2 = 0, \quad \ldots$

Если начальные условия $x(0) = x_0$ и $x'(0) = v_0$ даны, то из $x(t) = \mathrm{a}_0 + \mathrm{a}_1 t + \mathrm{a}_2 t^2 + \ldots$ и $x'(t) = \mathrm{a}_1 + \mathrm{a}_2 t + \ldots$ при $t = 0$ находим $\mathrm{a}_0 = x_0$ и $\mathrm{a}_1 = v_0$. Зная a_0 и a_1, теперь можно последовательно однозначно найти остальные коэффициены разложения.

Например, если $x(0) = 0$ и $x'(0) = 1$, то

$x(t) = t - \frac{1}{3!}t^3 + \frac{1}{5!}t^5 - \ldots = \sin x,$

а если $x(0) = 1$ и $x'(0) = 0$, то

$x(t) = 1 - \frac{1}{2!}t^2 + \frac{1}{4!}t^4 - \ldots = \cos x.$

b) *Использование экспоненты.*

А что если решение искать в виде $x(t) = \mathrm{e}^{\lambda t}$? Тогда

$\ddot{x} + x = \mathrm{e}^{\lambda t}(\lambda^2 + 1) = 0$ и, следовательно,

$\lambda^2 + 1 = 0$, т.е. $\lambda = i$ или $\lambda = -i$.

Но что это за странные комплексное колебания $x(t) = \mathrm{e}^{it}$, $x(t) = \mathrm{e}^{-it}$ или $x(t) = c_1\mathrm{e}^{it} + c_2\mathrm{e}^{-it}$?

• Проанализируйте ситуацию и доделайте все же задачу до конца, например, если $x(0) = 0$ и $x'(0) = 1$ или если $x(0) = 1$ и $x'(0) = 0$. Вспомните формулу Эйлера и сравните ваши результаты с полученными выше.

4. Общая идея приближения и разложения.

a) *Смысл позиционной системы счисления. Иррациональные числа.*

Вспомним, что означает привычная запись $\pi = 3,1415926...$ или вообще десятичная дробь $a_0, a_1a_2a_3...$ Ведь это сумма $a_0 10^0 + a_1 10^{-1} + a_2 10^{-2} + a_3 10^{-3} + ...$

Мы знаем, что конечные дроби отвечают рациональным числам, а запись иррационального числа требует бесконечного числа десятичных знаков и, следовательно, требует рассмотрения бесконечного числа слагаемых и бесконечных сумм — рядов.

Если мы обрываем этот ряд на каком-то месте, мы получаем рациональное число. С ним мы обычно и работаем. Что при этом произошло? Мы упростили объект, позволив себе некоторую ошибку. Т.е. мы приближаем сложный объект (здесь иррациональное число) удобными нам объектами (здесь рациональными числами), допуская при этом некоторую ошибку, которую называем точностью приближения. Улучшение точности приводит к усложнению приближающего объекта. Компромисс приходится искать в соответствии с конкретными обстоятельствами.

b) *Разложение вектора по базису и аналогии в рядах.*

В линейной алгебре и геометрии мы раскладываем векторы по базису. Традиционная для анализа запись $f(x) = f(0) + \frac{1}{1!}f'(0)x + \frac{1}{2!}f''(x)x^2 + ...$ фактически означает то же самое, если считать, что базисом является набор функций $\mathrm{e}_n = x^n$. Это ряд Тейлора функции f в точке $x_0 = 0$.

Аналогично, если какой-то периодический сигнал или процесс $f(t)$ подвергают спектральному анализу, то интересуются его разложением $f(t) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \cos nt + b_n \sin nt$ на простейшие гармонические колебания. Такие ряды называются классическими (или тригонометрическими) рядами Фурье.

Новое, что тут имеет место в сравнении с ситуацией линейной алгебры состоит в том, что рассматривается бесконечная сумма, которая понимается как некоторый предел конечных сумм.

Значит, кроме структуры линейного пространства, в пространстве наших объектов должно быть определено то или иное понятие близости объектов, позволяющее говорить о пределе последовательности самих объектов или их сумм.

c) *Расстояние.*

Близость объектов определяется наличием того или иного понятия окрестности объекта (окрестности точки пространства). Это называется заданием топологии пространства. В топологических пространствах можно говорить о пределе и непрерывности.

Если в пространстве тем или иным способом введено расстояние между объектами — точками пространства, то автоматически определена и окрестность точки, и даже точнее, любая ее δ-окрестность.

Расстояние между точками одного и того же пространства можно измерять по-разному. Например, расстояние между двумя непрерывными функциями на отрезке можно измерять максимумом модуля разности функций на этом отрезке (равномерная метрика), а можно измерять величиной интеграла от модуля разности функций на этом отрезке (интегральная метрика). Выбор метрики диктуется содержанием рассматриваемой задачи.

Итак, надо перейти к разработке намеченных идей и выяснению возникших вопросов, связанных с понятием ряда как бесконечной суммы.